Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$

Insiemi compatti

Definizione 1. *Sia K un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$ e sia $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ una famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^d$. Diciamo che la famiglia $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ è un* **ricoprimento** *di K se*

$$K \subset \bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i.$$

Diciamo inoltre che $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ è un **ricoprimento aperto** *se tutti gli insiemi A_i sono aperti. Diciamo che il ricoprimento è* **finito** *se il numero degli insiemi A_i è finito.*

Definizione 2. *Diciamo che $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ è un* **sottoricoprimento** *di $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$, se ogni insieme A_j della famiglia $\{A_j\ :\ j\in\mathcal{J}\}$ appartiene anche alla famiglia $\{A_i\ :\ i\in\mathcal{I}\}$.*

Definizione 3. *Diciamo che un insieme $K\subset\mathbb{R}^d$ è* **compatto** *se ogni suo ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito.*

Definizione 4. *Diciamo che un insieme $K\subset\mathbb{R}^d$ è* **compatto per successioni** *se ogni successione $X_n\in K$ ammette una sottosuccessione convergente che ha come limite un punto di K.*

Teorema 5. *Sia K un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$. Allora sono equivalenti le affermazioni seguenti.*

(i) *K è compatto;*

(ii) *K è chiuso e limitato;*

(iii) *K è compatto per successioni.*

Lemma 6. *Sia K un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$. Allora sono equivalenti le affermazioni seguenti.*

(ii) *K è chiuso e limitato;*

(iii) *K è compatto per successioni.*

Dimostrazione del lemma. (ii) $\Rightarrow$ (iii). Sia X_n una successione in K. Siccome K è limitato, lo è anche la successione X_n. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste una sottosuccessione X_{n_k} convergenete ad un qualche $X_\infty\in\mathbb{R}^n$. Siccome K è chiuso $X_\infty\in K$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Per assurdo, se K fosse illimtato esisterebbe una successione di punti $X_n\in K$ tale che $|X_n|\ge n$. Allora X_n non ammette sottosuccessioni convergenti. Contraddizione con (iii). Quindi K è limitato. Dimostriamo ora che K è chiuso (per successioni). Sia $X_n\in K$ una successione convergente ad un certo $X_\infty\in\mathbb{R}^d$. Per (iii) X_n ammette una sottosuccessione X_{n_k} converegnte ad un punto di K. Ma siccome X_n converge anche X_{n_k} converge ed ha lo stesso limite. Quindi $X_\infty\in K$. □

Dimostrazione del teorema. (i) $\Rightarrow$ (ii). Siccome la famiglia di palle B_n, $n\ge 1$, è un ricoprimento aperto di K esso ammette un sottoricoprimento finito. Ma allora K è contenuto in una palla di raggio N per un qualche $N\in\mathbb{N}$. Quindi K è limitato. Dimostriamo ora che K è chiuso (per successioni). Sia $X_n\in K$ una successione convergente ad un certo $X_\infty\in\mathbb{R}^d$. Se per assurdo $X_\infty\notin K$, allora la famiglia di aperti $\mathbb{R}^d\setminus\overline{B}_r(X_\infty)$ è un ricoprimento di K. Per (i) esso ammette un sottoricoprimento finito. Ma allora esiste $r>0$ tale che $K\subset\mathbb{R}^d\setminus\overline{B}_r(X_\infty)$. Il che è impossibile perché per n abbastanza grande $X_n\in B_r(X_\infty)$. Contraddizione.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Sia $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ un ricporimento aperto di K. Possiamo trovare un sottoricoprimento numerabile $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ora, supponiamo per assurdo che

$$\text{per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ esiste un punto } X_n \in K \setminus \Big(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\Big).$$

Per (iii) esiste una sottosuccessione X_{n_k} convergenta ad un certo $X_\infty \in K$. Ora, siccome $X_\infty \in A_N$ per un qualche N e siccome A_N è aperto esiste un $j > 0$ tale che

$$X_{n_k} \in A_N \text{ per ogni } k \geq j.$$

Ma questo è impossibile perché per sostruzione

$$X_{n_j} \notin A_N \text{ per } n_j \geq N.$$

□

Esercizi

Esercizio 7. *Siano $K_1 \subset \mathbb{R}^d$ e $K_2 \subset \mathbb{R}^d$ due insiemi compatti. Dimostrare che $K_1 \cap K_2$ e $K_1 \cup K_2$ sono compatti.*

Esercizio 8. *Siano $K \subset \mathbb{R}^d$ un compatto e $C \subset \mathbb{R}^d$ un chiuso. Dimostrare che $K \cap C$ è un compatto. È vero che anche $K \cup C$ è un compatto?*

Esercizio 9. *Siano $K \subset \mathbb{R}^d$ un compatto e $A \subset \mathbb{R}^d$ un aperto. Dimostrare che $K \setminus A$ è un compatto.*

Esercizio 10. *Siano $K_1 \subset \mathbb{R}^m$ e $K_2 \subset \mathbb{R}^n$ due insiemi compatti. Dimostrare che l'insieme $K_1 \times K_2 \subset \mathbb{R}^{m+n}$ è compatto.*

Esercizio 11. *Sia $K \subset \mathbb{R}^2$ un compatto. Dimostrare che per ogni $a \in \mathbb{R}$ la sezione verticale*

$$S_a = \{(x, y) \in K \;:\; x = a\},$$

è un compatto.

Esercizio 12. *Dimostrare che il bordo di un compatto è compatto.*

Teorema di Weierstrass

Teorema 13 (Teorema di Weierstrass in $\mathbb{R}^n$)**.** *Siano K un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$ e $F : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, F ammette un massimo ed un minimo su K.*

Esercizi

Esercizio 14 (Teorema generale di Weierstrass)**.** *Siano K un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$ e $F : K \to \mathbb{R}^m$ una funzione continua. Mostrare che anche l'insieme $F(K)$ è compatto.*

Esercizio 15 (Diametro di un insieme compatto)**.** *Sia K un sottoinsieme compatto e non vuoto di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che esistono due punti $X \in K$ e $Y \in K$ che realizzano il massimo*

$$\max\Big\{|X - Y| \ : \ X \in K,\ Y \in K\Big\}.$$

Esercizio 16. *Siano K_1 e K_2 due insiemi compatti e non vuoti in $\mathbb{R}^n$.*

(1) *Dimostrare che esistono due punti $X_1 \in K_1$ e $X_2 \in K_2$ che realizzano il minimo*

$$M = \min\Big\{|X_1 - X_2| \ : \ X_1 \in K_1,\ X_2 \in K_2\Big\}.$$

(2) *Dimostrare che K_1 e K_2 sono disgiunti se e solo se $M > 0$.*

Esercizio 17 (La funzione distanza)**.** *Sia C un insieme chiuso e non vuoto in $\mathbb{R}^n$.*

(1) *Dimostrare che per ogni $X \in \mathbb{R}$ esiste $Y \in C$ che realizza il minimo*

$$\mathrm{dist}(X, C) = \min\Big\{|Y - X| \ : \ Y \in C\Big\}.$$

(2) *Dimostrare che la funzione*

$$\mathrm{dist}(\,\cdot\,, C) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

è una funzione continua su $\mathbb{R}^n$.

(3) *Dimostrare che*

$$\mathrm{dist}(X, C) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X \in C.$$

Esercizio 18. *Siano K_1 e K_2 due insiemi compatti, disgiunti e non vuoti in $\mathbb{R}^n$ e siano $\delta_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\delta_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ le rispettive funzioni distanza, ovvero*

$$\delta_i(X) := \min\Big\{|Y - X| \ : \ Y \in K_i\Big\} \quad \textit{dove} \quad i = 1, 2.$$

(1) *Dimostrare che esiste $X \in \mathbb{R}^n$ tale che $\delta_1(X) = \delta_2(X)$.*

(2) *Siano $X_1 \in K_1$ e $X_2 \in K_2$ due punti che realizzano il minimo*

$$M = \min\Big\{|X_1 - X_2| \ : \ X_1 \in K_1,\ X_2 \in K_2\Big\}.$$

Si consideri il punto medio $X = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$. Si mostri che $\delta_1(X) = \delta_2(X)$.

(3) *Viceversa, se $X \in \mathbb{R}^n$ è un punto tale che $\delta_1(X) = \delta_2(X)$, mostrare che esistono due punti $X_1 \in K_1$ e $X_2 \in K_2$ che realizzano il minimo M e che sono tali che $X = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$.*

Uniforme continuità e teorema di Cantor

Definizione 19 (Uniforme continuità)**.** *Siano Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione data. Diciamo che F è uniformemente continua su Ω, se:*

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

se $X, Y \in \Omega$ sono tali che $|X - Y| < \delta$, allora $|F(X) - F(Y)| < \varepsilon$.

Esempi di funzioni uniformemente continue

Esempio 20. *La funzione $\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\delta(X) = |X|$ è uniformemente continua su $\mathbb{R}^n$.*

Esempio 21. *La funzione $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $S(X) = |X|^2$ NON è uniformemente continua su $\mathbb{R}^n$.*

Esempio 22. *La funzione $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $P(x, y) = x + y^2$ è uniformemente continua su*

$$\Omega = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |y| \le 1\Big\}.$$

Teorema di Cantor

Teorema 23 (Teorema di Cantor in $\mathbb{R}^n$)**.** *Sia K un insieme compatto in $\mathbb{R}^n$ e sia $F : K \to \mathbb{R}$ una funzione continua su K. Allora, F è uniformemente continua su K.*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che esiste $\varepsilon > 0$ tale che:

per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono due punti $X_n \in \mathcal{K}$ e $Y_n \in \mathcal{K}$ tali che

$$|X_n - Y_n| < \frac{1}{n}, \quad ma \quad |F(X_n) - F(Y_n)| \ge \varepsilon.$$

Siccome $\mathcal{K}$ è compatto esiste una sottosuccessione X_{n_k} di X_n convergente:

$$\lim_{k\to\infty} X_{n_k} = X_\infty \in \mathcal{K}.$$

Inoltre, abbiamo ancora che

$$|X_{n_k} - Y_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \qquad e \qquad \big|F(X_{n_k}) - F(Y_{n_k})\big| \ge \varepsilon.$$

In particolare, anche la successione Y_{n_k} converge a X_∞. Ora, per la continuità di F si ha

$$\varepsilon \le \lim_{k\to\infty} |F(X_{n_k}) - F(Y_{n_k})\big| = |F(X_\infty) - F(X_\infty)\big| = 0.$$

Assurdo. $\square$